

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –****08.02.2026****CLASA a VIII-a****SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

Notă: - Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului precizat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu.

Subiectul I (20 puncte)

Determinați cifrele numărului \overline{abc} cu proprietatea că $\frac{10\overline{ab}}{c} - \frac{\overline{bc}}{a} = 90$ și stabiliți câte numere de acest tip sunt.

Soluție:

Avem:

$$\frac{10(10a + b)}{c} - \frac{10b + c}{a} = 90$$

$$\frac{a(100a + 10b) - c(10b + c)}{ac} = 90$$

$$100a^2 + 10ab - 10bc - c^2 = 90ac$$

$$10(10a^2 + ab - bc - 9ac) = c^2$$

$$\Rightarrow c : 10$$

Dar $c \neq 0$ și $c < 10 \Rightarrow$ nu există numere care să verifice condiția problemei

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce $\frac{10(10a + b)}{c} - \frac{10b + c}{a} = 90$	3p
$\frac{a(100a + 10b) - c(10b + c)}{ac} = 90$	3p
$100a^2 + 10ab - 10bc - c^2 = 90ac$	4p
$10(10a^2 + ab - bc - 9ac) = c^2$	3p
$\Rightarrow c : 10$	3p
$c \neq 0$ și $c < 10 \Rightarrow$ nu există numere care să verifice condiția problemei	4p
Total	20p

Subiectul II (20 puncte)

Triunghiurile ACD și ABC sunt situate în plane diferite. Fie G_1 centrul de greutate al triunghiului ACD și G_2 centrul de greutate al triunghiului ABC . Știind că N este mijlocul segmentului AC , $M \in DB$, astfel încât $\frac{DM}{DB} = \frac{2}{5}$, iar $MN \cap DG_2 = \{E\}$, demonstrați că $EG_1 \parallel (ABC)$.

Soluție:

Avem în triunghiul ACD , G_1 centrul de greutate: $\frac{DG_1}{DN} = \frac{2}{3}$

Avem în triunghiul ABC , G_2 centrul de greutate: $\frac{BG_2}{BN} = \frac{2}{3}$

Deducem că

$$\frac{DG_1}{DN} = \frac{BG_2}{BN}$$

iar din reciproca teoremei lui Thales: $G_1G_2 \parallel BD$.

Considerăm $G_1G_2 \cap MN = \{F\}$.

În triunghiul BMN , $G_2F \parallel BM$ aplicăm teorema fundamentală a asemănării: $\triangle NG_2F \sim \triangle NBM$ și obținem :

$$\frac{FG_2}{BM} = \frac{NG_2}{NB} = \frac{NF}{NM} = \frac{1}{3}$$

Calculăm :

$$FG_2 = \frac{BM}{3} = \frac{BD - DM}{3} = \frac{BD - \frac{2}{5}BD}{3} = \frac{BD}{5}$$

Avem:

$$F_2G \parallel MD \xrightarrow{TFA} \triangle EFG_2 \sim \triangle EMD$$

$$\Rightarrow \frac{EG_2}{ED} = \frac{EF}{EM} = \frac{FG_2}{MD}$$

De unde ajungem la:

$$\frac{EG_2}{ED} = \frac{\frac{BD}{5}}{\frac{2}{5}BD} = \frac{1}{2}$$

și cum G_1 este centrul de greutate în triunghiul ABC , Avem:

$$\frac{NG_1}{G_1D} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EG_2}{ED} = \frac{NG_1}{G_1D} \xrightarrow{RTTh} EG_1 \parallel NG_2 \subset (ABC) \Rightarrow EG_1 \parallel (ABC).$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce că $\frac{DG_1}{DN} = \frac{BG_2}{BN}$	3p
Deduce că $G_1G_2 \parallel BD$	2p
Deduce $\triangle NG_2F \sim \triangle NBM$ și obținem: $\frac{FG_2}{BM} = \frac{NG_2}{NB} = \frac{NF}{NM} = \frac{1}{3}$	3p
Calculează $FG_2 = \frac{BM}{3} = \frac{BD - DM}{3} = \frac{BD - \frac{2}{5}BD}{3} = \frac{BD}{5}$	3p
Arată că: $\frac{EG_2}{ED} = \frac{EF}{EM} = \frac{FG_2}{MD}$	3p
Ajunge la: $\frac{EG_2}{ED} = \frac{\frac{BD}{5}}{\frac{2}{5}BD} = \frac{1}{2}$	3p
Finalizează $EG_1 \parallel (ABC)$.	3p
Total	20p

Subiectul III (25 puncte)

Arătați că $24\sqrt{2} \leq (x + \frac{6}{x})(y + \frac{12}{y}) \leq 35$ pentru orice numere reale $x \in [2, 3]$ și $y \in [3, 4]$.

Soluție:

$$x + \frac{6}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{6}{x}} = 2\sqrt{6}$$

$$y + \frac{12}{y} \geq 2 \cdot \sqrt{y \cdot \frac{12}{y}} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

$$\left(x + \frac{6}{x}\right) \cdot \left(y + \frac{12}{y}\right) \geq 8\sqrt{18} = 24\sqrt{2}$$

$$x + \frac{6}{x} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x} + 5 = \frac{(x-2)(x-3)}{x} + 5$$

$$y + \frac{12}{y} = \frac{y^2 - 7y + 12}{y} + 7 = \frac{(y-3)(y-4)}{y} + 7$$

$$x \in [2, 3] \Rightarrow (x-2)(x-3) \leq 0 \Rightarrow x + \frac{6}{x} \leq 5$$

$$y \in [3, 4] \Rightarrow (y-3)(y-4) \leq 0 \Rightarrow y + \frac{12}{y} \leq 7$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{6}{x}\right) \left(y + \frac{12}{y}\right) \leq 35$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$x + \frac{6}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{6}{x}} = 2\sqrt{6}$	4p
$y + \frac{12}{y} \geq 2 \cdot \sqrt{y \cdot \frac{12}{y}} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$	4p
$\left(x + \frac{6}{x}\right) \cdot \left(y + \frac{12}{y}\right) \geq 8\sqrt{18} = 24\sqrt{2}$	3p
$x + \frac{6}{x} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x} + 5 = \frac{(x-2)(x-3)}{x} + 5$	3p
$y + \frac{12}{y} = \frac{y^2 - 7y + 12}{y} + 7 = \frac{(y-3)(y-4)}{y} + 7$	3p
$x \in [2, 3] \Rightarrow (x-2)(x-3) \leq 0 \Rightarrow x + \frac{6}{x} \leq 5$	3p
$y \in [3, 4] \Rightarrow (y-3)(y-4) \leq 0 \Rightarrow y + \frac{12}{y} \leq 7$	3p
$\left(x + \frac{6}{x}\right) \left(y + \frac{12}{y}\right) \leq 35$	2p
Total	25p

Subiectul IV (25 puncte)

Calculați :

a) $S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2025}} ;$

b) $S = \frac{1}{5\sqrt{1}+\sqrt{5}} + \frac{1}{9\sqrt{5}+5\sqrt{9}} + \frac{1}{13\sqrt{9}+9\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2021}+2021\sqrt{2025}} .$

Soluție:

a)

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{1}}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{9}} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{9}} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{9}}{4}$$

...

$$\frac{1}{\sqrt{2021} + \sqrt{2025}} = \frac{\sqrt{2025} - \sqrt{2021}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021} + \sqrt{2025}} =$$

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{1}}{4} + \frac{\sqrt{9} - \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{13} - \sqrt{9}}{4} + \dots + \frac{\sqrt{2025} - \sqrt{2021}}{4} = \frac{\sqrt{2025} - \sqrt{1}}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

b)

$$\frac{1}{5\sqrt{1} + \sqrt{5}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\frac{1}{9\sqrt{5} + 5\sqrt{9}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{9}} \right)$$

$$\frac{1}{13\sqrt{9} + 9\sqrt{13}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{13}} \right)$$

$$\frac{1}{2025\sqrt{2021} + 2021\sqrt{2025}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2021}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5\sqrt{1} + \sqrt{5}} + \frac{1}{9\sqrt{5} + 5\sqrt{9}} + \frac{1}{13\sqrt{9} + 9\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2021} + 2021\sqrt{2025}} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{45} \right) = \frac{11}{45}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{4}, \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{4}, \dots,$ $\frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2025}} = \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2021}}{4}$	4p
$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2025}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{4} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{4} +$ $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{4} + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2021}}{4}$	4p
$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{4} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{4} + \dots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2021}}{4} = \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{1}}{4} = \frac{44}{4} = 11;$	2p
b) $\frac{1}{5\sqrt{1}+\sqrt{5}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \frac{1}{9\sqrt{5}+5\sqrt{9}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{9}} \right), \frac{1}{13\sqrt{9}+9\sqrt{13}} =$ $= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{13}} \right), \dots, \frac{1}{2025\sqrt{2021}+2021\sqrt{2025}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2021}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \right)$	5p
$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \right)$	5p
$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{45} \right) =$ $\frac{11}{45}.$	5p
Total	25p